



۱ دامنه‌ی تعریف تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ کدام است؟

- ۱ $[-2, 5]$ ۲ $(-2, 5) - (0, 3)$ ۳ $[-2, 0) \cup (3, 5]$ ۴ $R - [0, 3]$

۲ نمودار تابع $y = -x^2 + 2x + 5$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟

- ۱ $(3, 4)$ ۲ $(2, 5)$ ۳ $(3, 5)$ ۴ $(2, 6)$

۳ اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ آن گاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- ۱ $x^2 - 1$ ۲ $x^2 + 1$ ۳ $x^2 - 2x$ ۴ $x^2 + 2x$

۴ اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ و $g(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$ باشند دامنه‌ی تعریف تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ۱ R ۲ $\{1\}$ ۳ $[0, 1]$ ۴ $[-1, 1]$

۵ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، تابع $f(x)$ برابر کدام است؟

- ۱ $2x^2 + 3x + 1$ ۲ $2x^2 - 2x + 3$ ۳ $2x^2 - x + 4$ ۴ $2x^2 + x + 3$

۶ در تابع خطی $f(x)$ اگر $f(5) = 2$ ، $f(3x - 1) + 3f(1 - x) = 4$ باشد $f(14)$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

۷ تابع $f(x) = |2x - 1| - 2|x + 3|$ در بازه‌ای وارون‌پذیر است. ضابطه‌ی وارون آن کدام است؟

- ۱ $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}(x + 2) ; |x| \leq 3$ ۲ $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5) ; |x| \leq 7$

- ۳ $f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5) ; |x| \leq 4$ ۴ $f^{-1}(x) = -\frac{1}{3}(x + 2) ; |x| \leq 5$

۸ دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ $\frac{5}{2}$

۹ اگر $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$ و $g(x) = \frac{x^3+1}{2-x^3}$ باشد ضابطه‌ی تابع $(g \circ f)^{-1}$ کدام است؟

- ۱ $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{3}{1-x}$ ۲ $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{-3}{1+x}$ ۳ $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+3}{x}$ ۴ $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-3}{x}$



پاسخ نامه تشریحی

جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x > 3 \text{ یا } x < 0 \quad (I)$$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد.

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq \log 10$$

$$x^2 - 3x \leq 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -2 \leq x \leq 5 \quad (II)$$

$$x \in [-2, 0) \cup (3, 5]$$

از اشتراک II, I به نتیجه‌ی $-2 \leq x < 0$ یا $3 < x \leq 5$ می‌رسیم. یعنی:

می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به جای x عبارت $x - 3$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد ۲ اضافه شود؛ بنابراین داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$y = -(x - 3)^2 + 2(x - 3) + 5 - 2 = -x^2 + 6x - 9 + 2x - 6 + 3 \Rightarrow y = -x^2 + 8x - 12$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^2 + 8x - 12 > 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 12 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - x - 2 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 - (g(x)) - 2 \\ f(g(x)) = x^2 + x - 2 \end{cases}$$

حال با تغییر متغیر $g(x) = t$ و تساوی دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\begin{aligned} \Rightarrow t^2 - t - 2 &= x^2 + x - 2 \Rightarrow t^2 - t = x^2 + x \\ \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} &= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = (x + \frac{1}{2})^2 \\ \Rightarrow (t - \frac{1}{2}) &= \pm(x + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} \Rightarrow t = x + 1 \Rightarrow g(x) = x + 1 \\ t - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2} \Rightarrow t = -x \Rightarrow g(x) = -x \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + (-x) = x^2 - 2x - 2 \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - x - 2 + x + 1 = x^2 - 1 \end{cases}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

ابتدا دامنه‌ی تعریف توابع g, f را به دست می‌آوریم.

$$g(\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x} + x \rightarrow Dg : R - \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \rightarrow D_f : 2x - x^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} D_f : 0 \leq x \leq 2$$

$$\begin{aligned} D_{fog} &= \{x \in Dg, g(x) \in D_f\} = \{x \neq 0, 0 \leq x + \frac{1}{x} \leq 2\} \\ &= \{x \neq 0, 0 \leq \frac{x^2 + 1}{x} \leq 2\} \end{aligned}$$

حال باید نامعادله‌ی $0 \leq \frac{x^2 + 1}{x} \leq 2$ را حل کنیم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x} \geq 0 \Rightarrow x > 0 \\ \frac{x^2 + 1}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} - 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x - 1)^2}{x} \leq 0 \Rightarrow x < 0, x = 1 \end{cases} \\ \xrightarrow{\text{اشتراک}} x = 1 \\ \text{پس } D_{fog} = \{x \neq 0, x = 1\} = \{1\} \end{aligned}$$

روش اول: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$fog(x) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \rightarrow f(2x + 1) = 8x^2 + 6x + 5$$

برای پیدا کردن $f(x)$ باید $2x + 1$ را مساوی t قرار دهیم.

$$2x + 1 = t \rightarrow 2x = t - 1 \rightarrow x = \frac{t - 1}{2}$$



$$\begin{aligned} \text{پس } f(t) &= 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 \rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t^2 + 1 - 2t}{4}\right) + 3(t-1) + 5 \\ &\rightarrow f(t) = 2t^2 + 2 - 4t + 3t - 3 + 5 \rightarrow f(t) = 2t^2 - t + 4 \\ &\rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4 \end{aligned}$$

روش دوم: $f(2x+1) = 8x^2 + 6x + 5$ است. به جای x یک عدد دلخواه مثلاً صفر قرار می‌دهیم:

$$x = 0 \rightarrow f(1) = 5$$

گزینه‌ای درست است که اگر در آن $x = 1$ را قرار دهیم حاصل برابر ۵ شود که گزینه‌ی سوم است.

تابع خطی به صورت $f(x) = ax + b$ نشان داده می‌شود. ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\begin{aligned} f(3x-1) + 3f(1-x) &= 4 \rightarrow a(3x-1) + b + 3(a(1-x) + b) = 4 \\ &\rightarrow 3ax - a + b + 3a - 3ax + 3b = 4 \rightarrow 2a + 4b = 4 \rightarrow a + 2b = 2 \\ f(5) &= 2 \rightarrow 5a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 2 \\ 5a + b = 2 \end{cases} \rightarrow a = \frac{2}{9}, b = \frac{16}{9} \rightarrow f(x) = \frac{2}{9}x + \frac{16}{9} \\ &\rightarrow f(14) = \frac{28}{9} + \frac{16}{9} = \frac{44}{9} = 4 \end{aligned}$$

تابع $f(x) = |2x-1| - |2x+6|$ را به صورت چند ضابطه‌ای می‌نویسیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 + 2x + 6 & x < -3 \\ -2x + 1 - 2x - 6 & -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2x - 1 - 2x - 6 & x > \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 7 & x < -3 \\ -4x - 5 & -3 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -7 & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -4x - 5$ در بازه $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ معکوس‌پذیر است.

$$y = -4x - 5 \rightarrow 4x = -y - 5 \rightarrow x = -\frac{y}{4} - \frac{5}{4} \rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{4}(x + 5)$$

دقت کنید که دامنه‌ی f^{-1} برابر برد تابع f است. پس کافی است برد تابع $y = -4x - 5$ را در بازه‌ی $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$ بدست آوریم.

$$\begin{aligned} -3 \leq x \leq \frac{1}{2} &\xrightarrow{\times (-4)} 12 \geq -4x \geq -2 \xrightarrow{\text{با } (-5) \text{ جمع می‌کنیم}} 7 \geq -4x - 5 \geq -7 \\ &\rightarrow -7 \leq y \leq 7 \rightarrow |y| \leq 7 \rightarrow D_{f^{-1}} = |x| \leq 7 \end{aligned}$$

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a - 3 = 2a \rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

ابتدا $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم سپس ضابطه‌ی معکوس آن را به دست می‌آوریم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{x+2+1}{2-(x+2)} = \frac{x+3}{-x}$$

اکنون x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x+3}{-x} \rightarrow -xy = x+3 \rightarrow x+xy = -3 \rightarrow x(1+y) = -3 \\ &\rightarrow x = \frac{-3}{1+y} \rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{-3}{1+x} \end{aligned}$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴